**Leçon 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

On se place dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les suites sont à valeurs dans $\mathbb{K}$

## 1. Convergence d'une série. —

*1. Généralités.* —

- Def : La série de terme général $u_n$ est la suite des $S_n=\sum_k u_k$. Si la suite des $S_n$ cv vers $S$, alors on dit que la série est convergente de somme S. Elle est divergente sinon.
  $S_n$ est la suite des sommes partielles de la série, et $R_n=S-S_n$ est la suite des restes.
- Ex : $\sum_k \frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}\to 1$, et est de reste $R_n=\frac{1}{n+1}$
- Pro : Une série géométrique de raison $z\in\mathbb{K}^*$ est une série de terme général $az^n$ pour un $a\in\mathbb{K}$. Si $|z|<1$ alors la série converge et $S=\frac{a}{1-z}$ et $R_n=a\frac{z^{n+1}}{1-z}$. Si $|z|\geq 1$, alors la série diverge et $S_n\sim az^n$ si $|z|>1$. Si $z=1$ on a $S_n=a.n$.
- Pro : Si une série converge, alors son terme général converge vers 0.
- Contre-ex : On a $\sum_k \log(1+\frac{1}{n})=\log(n+1)$ donc la série diverge bien que $u_n\to 0$.
- Ex : Les séries de terme général $sin(a.n)$ ne sont convergentes que si $a\in\pi\mathbb{Q}$ car sinon le terme général ne converge pas vers 0.
- Pro : L'ensemble des suites $u_n$ tq la série $\sum_n u_n$ cv est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application $(u_n)_n\to\sum_n u_n$ est une forme linéaire sur cet ev.
- Ex : Si $u_n=a_n+ib_n$, alors $\sum_n u_n$ cv $\Leftrightarrow \sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ cv.

*2. Critère de Cauchy et convergence absolue.* —

- Théorème : $\sum_n u_n$ converge ssi $S_n$ est de Cauchy.
- Ex : Série harmonique : $S_n=\sum_k \frac{1}{k}$. $S_{2n}-S_n\geq\frac{1}{2}$ donc diverge.
  On a $\sum_k \frac{1}{k}\sim\log(n)$ par décroissance de $x\mapsto\frac{1}{x}$.
- Def : $\sum_n u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_n |u_n|$ converge.
- Pro : L'ensemble des suites dont la série converge absolument est un $\mathbb{K}$-ev noté $l^1(\mathbb{K})$.
- Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.
- Ex : $u_n=e^{int}\frac{1}{n^2}$ est absolument convergente $\forall t\in K$.
- Pro : Si $(u_n)_n\in l^1$ alors $|R_n|\leq\sum_{k\geq n+1}|u_k|$.
- Contre-ex : $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.
- Def : Une série qui converge sans être absolument convergente est appelée semi-convergente.

## 2. Séries à termes réels positifs. — Ici, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $u_n,v_n\in\mathbb{R}_+$.

*1. Comparaison de séries.* —

- Théorème : $\sum_n u_n$ converge ssi $S_n$ est majorée.
- Ex : $S_n=\sum_k\frac{1}{k!}\leq 3$. On note $e=\sum_n\frac{1}{n!}$.
  On a $n!S_n<n!e<n!S_n+\frac{1}{n}$, ce qui permet de montrer que e est irrationnel.
- Premier théorème de comparaison : Supposons $u_n\leq v_n$. On note $\sigma_n$ et $\rho_n$ la suite des sommes partielles et des restes de la série de terme général $v_n$, si cela existe.
  Alors $\sum_n v_n$ converge $\Rightarrow\sum_n u_n$ converge et $R_n\leq\rho_n$.
  Et $\sum_n u_n$ diverge $\Rightarrow\sum_n v_n$ diverge et $S_n\leq\sigma_n$.
- Thm : (Série de Riemann) Soit $\alpha>0$. La série $\sum_n\frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha\leq 1$.
- Appli : Les séries de Riemann permettent de définir la fonction $\zeta: s\in]1,+\infty\mapsto\sum_n\frac{1}{n^s}\in\mathbb{R}_+^*$ appelée fonction $\zeta$ de Riemann.
- Second théorème de comparaison : Si $u_n\sim v_n$, alors les séries sont de même nature. Si elles sont cv, alors $R_n\sim\rho_n$. Si elles divergent, alors $S_n\sim\sigma_n$.
- Pro : Soit $\sum_n\frac{1}{n^s}$ une série de Riemann. Si $s>1$ alors $R_n\sim\frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$. Si $s<1$ alors $S_n\sim\frac{n^{1-s}}{1-s}$. Si $s=1$ alors $S_n\sim\log(n)$.
- Ex : Soit $S_n=\sum_k\frac{1}{k}-\log(n)$. Cette suite est cv, et on note $\gamma=lim(S_n)$ appelée constante d'Euler. On a alors $S_n=\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$.
- Rem : Le reste $R_n$ d'une série de Riemann convergente vérifie $\frac{1}{n^s}=o(R_n)$. On dit que les séries de Riemann convergent lentement.
  Le reste d'une série géométrique de raison $0<q<1$ vérifie $R_n=O(sup_{k\geq n}(u_k))$. On dit que la série converge rapidement.
- Thm : Comparaison à une série de Riemann : Si il existe $s>1$ tel que $(n^s u_n)_n$ est majorée, alors $\sum_n u_n$ converge.
  S'il existe $0<s<1$ tel que $(n^s u_n)_n$ est minorée par un réel $>0$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.
- Ex : Formule de Stirling : $n!=(\frac{n}{e})^n.\sqrt{2\pi n}(1+\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n}))$.

*2. Règles usuelles de convergence.* —

- Règle de Cauchy : $\limsup((u_n)^{1/n})<1\Rightarrow\sum_n u_n$ convergente.
  $\limsup((u_n)^{1/n})>1\Rightarrow\sum_n u_n$ divergente.
- Pro : Si $\limsup((u_n)^{1/n})<1$, soient $0<q<1$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $(u_n)^{1/n}\leq q$ $\forall n\geq n_0$. Alors $R_n\leq S\frac{q^{n+1}}{1-q}$, $\forall n\geq n_0$.
- Règle de d'Alembert : $\limsup(\frac{u_{n+1}}{u_n})<1\Rightarrow\sum_n u_n$ convergente.
  $\limsup(\frac{u_{n+1}}{u_n})>1\Rightarrow\sum_n u_n$ divergente.
- Ex : Pour la série de terme général $u_n=n^s q^n$ avec $s\in\mathbb{R}$ et $0<q<1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q(1+\frac{1}{n})^s\to q$, donc la série converge.
- Pro : Si $\limsup(\frac{u_{n+1}}{u_n})<1$, soient $0<q<1$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q$ $\forall n\geq n_0$.
  Alors $R_n\leq u_n\frac{q}{1-q}$, $\forall n\geq n_0$.
  La convergence de la série est rapide.
- Pro : d'Alembert implique Cauchy : Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers L, alors $(u_n)^{1/n}\to L$.
- Règle de Raabe-Duhamel : Soit $a_n=n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
  Si $\liminf(a_n)<1$, alors $\sum_n u_n$ converge. Si $\liminf(a_n)>1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

*3. Comparaisons séries-intégrales.* —

- Pro : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante. Alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} f$ et la série $\sum_n f(n)$ sont de même nature.
- Ex : Série de Bertrand : $\sum_n \frac{1}{nlog(n)^s}$ converge si $s > 1$, et diverge si $s \leq 1$.
- Thm : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante et intégrable. Alors $\sum_n f(n)$ converge et on a $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$.
- Ex : Pour calculer $\zeta(2)$ avec une marge d'erreur $\leq 10^{-3}$, il n'est pas utile de calculer $S_{1000}$, il suffit de calculer $S_{23}$ et de prendre pour valeur approchée la somme de $S_n$ et de la moyenne arithmétique des encadrements intégraux de $R_n$.
- Def : Un ordre moyen de $(u_n)_n$ est $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\sum_{n\leq x} u_n \sim \int_0^x g(t)dt$.
- **Dev** : Ordre moyen de $\Phi$ et $\sigma$ : Un ordre moyen de $\sigma(n) = \sum d|nd$ est $x \mapsto \frac{\pi^2}{6}x$, et $\sum_{n\leq x} \sigma_n = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(xlog(x))$.
  Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler $\Phi$ est $x \mapsto \frac{6}{\pi^2}x$, et $\sum_{n\leq x} \sigma_n = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(xlog(x))$.
- Thm : Si au contraire f n'est pas intégrable, alors $S_n \sim \int_0^n f(x)dx$.

## 3. Séries à termes quelconques. —

*1. Séries alternées.* —

- Def : On appelle série alternée toute série de la forme $\sum_n (-1)^n u_n$ ou $\sum_n (-1)^{n+1} u_n$ avec $u_n \in \mathbb{R}_+$.
- Thm : Critère des séries alternées. Si $u_n$ converge en décroissant vers 0, alors $\sum_n (-1)^n u_n$ est convergente et $|R_n| \leq u_{n+1}$.
- Ex : $arctan(x) = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, donc $|R_N| \leq \frac{x^{2N+1}}{2N+1}$.
  On a $\frac{\pi}{4} = arctan(1)$. Il faut 500 itérations pour une précision de $10^{-3}$.
  $\frac{\pi}{4} = 4arctan(\frac{1}{5}) - arctan(\frac{1}{239})$ (admis). Il faut 3 itérations pour une précision de $10^{-3}$.

*2. Transformation d'Abel.* —

- Def : Effectuer une transformation d'Abel c'est écrire :
  $\sum_k u_k v_k = S_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k(v_k - v_{k-1})$ (c'est une IPP de séries)
- Thm : Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que $\sum_n u_n v_n$ converge :
  a) $(S_n)_n$ bornée et $v_n > 0$ et converge vers 0 en décroissant.
  b) $\sum u_n$ converge, $v_n > 0$ et décroissante.
  c) $(S_n)_n$ bornée, $v_n \to 0$, et $\sum_n |v_n - v_{n+1}|$ convergente.
- Ex : avec $\sum_n a_n cos(s.n)$ et $\sum_n a_n sin(n.s)$

*3. Séries entières.* —

- Def : Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$ où $z, a_n \in \mathbb{C}$.
- Lemme d'Abel : Soit $z_0$ tq la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors $\forall |z| < |z_0|$, la série entière est absolument convergente.
- Def : Le rayon de convergence est le sup des $r \in [0, +\infty]$ tq la série entière converge en r.
- Pro : Pour R le rayon de convergence d'une série entière, on a convergence absolue pour $|z| < R$ et divergence pour $|z| > R$.
- Ex : $\sum_n n^a z^n$ a un rayon de convergence de 1. $\sum_n n! z^n$ a un rayon de convergence nul. $exp(x) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence $R = +\infty$.
- **Dev** : Théorème des Lacunes de Hadamard : Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante d'entiers telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, pour tous $n \geq 0$.
  Soit $(a_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.
  Alors, la somme de cette série entière n'a aucun point régulier sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$.
- App : La somme de la série $\sum_{n\geq 0} n.z^{2^n}$ est holom sur $\mathbb{D}(0,1)$, diverge en tout point de $\partial\mathbb{D}(0,1)$, et n'admet aucun prolongement holom. La somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}.z^{2^n}$ est holom sur $\mathbb{D}(0,1)$, se prolonge continument sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$, mais n'admet aucun prolongement holom.
- Théorème d'Abel Angulaire
- Théorème taubérien faible

*4. Produit de Cauchy de deux séries.* —

- Def : On appelle série produit la série des $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$, aussi appelé produit de convolution des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
- Thm : Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in l^1$ alors la série produit est absolument convergente, et $(\sum_n w_n) = (\sum_n u_n)(\sum_n v_n)$.
- App : On a ainsi $e^{x+y} = e^x.e^y$
- Pro : La série produit de deux séries entières a un rayon de convergenre $R \geq \min R_0, R_1$
- Ex : Nombres de Bell. Pour $B_n$ le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$, on a $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$. En utilisant la série génératrice $\sum_n \frac{B_n}{n!} x^n$, on montre alors que $B_n = \frac{1}{e} \sum_k \frac{k^n}{k!}$.

**Références**


Amrani : Gros du plan.
Gourdon : Abélisation, Séries alternées, séries entières. Exemples.
Hauchecorne : Contre-Exemple de séries ayant des problèmes.
Tenenbaum : Ordre moyen de Phi et sigma.(Dev)
Zuily, Queffélec : Lacunes de Hadamard.(Dev)


---


*June 11, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*